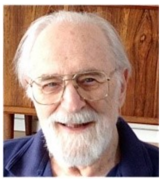
Simplification de la table de vérité par des tables de Karnaugh



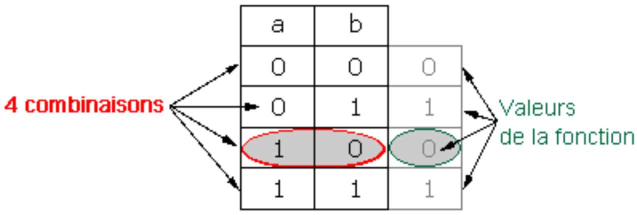
Maurice Karnaugh, est un ingénieur en télécommunications.
Il a développé la table de Karnaugh aux laboratoires Bell en 1953. De nationalité américaine, c'est un spécialiste de mathématique logique et physique

Introduction

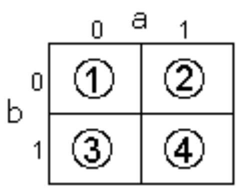
Nous avons vu que les règles et propriétés de l'algèbre de Boole permettent de simplifier les fonctions. Bien que cela soit un très bon outil, l'algèbre de Boole n'autorise pas d'erreur. En plus cette méthode est cependant relativement lourde et ne permet jamais de savoir si l'on aboutit à une expression minimale de la fonction ou pas. Pourtant il faudrait pouvoir utiliser les caractéristiques de l'algèbre de Boole et essayer de faire une résolution « graphique » et donc simplifier des équations booléennes.
Des tableaux de Karnaugh sont un moyen pour le faire. Par contre, il demande une certaine compréhension au départ afin de connaître et comprendre toutes les astuces.

Principe inventé par Karnaugh

Regardons d'abord une table de vérité avec deux variables binaires. Cela nous rapporte quatre possibilités ou combinaisons.



L'idée de Karnaugh est d'associer une surface à chaque combinaison des variables, en adoptant la représentation suivante :



Nous disposons donc de 4 cases correspondant aux 4 combinaisons de variables.

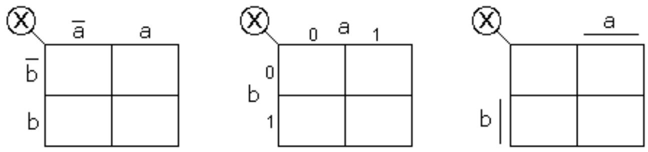
Pour chacune des cases nous associons **un produit** de variables

La case 1 correspond à la combinaison a = 0 et b = 0 ⇒ $(\overline{A}.\overline{B})$
La case 2 correspond à la combinaison a = 1 et b = 0 ⇒ $(A.\overline{B})$
La case 3 correspond à la combinaison a = 0 et b = 1 ⇒ $(\overline{A}.B)$
La case 4 correspond à la combinaison a = 1 et b = 1 ⇒ $(A.B)$

Dans chacune de ces cases sera inscrite la valeur de la fonction pour la combinaison de variables correspondant à cette case.
En suivant l'exemple déjà représenté ci-dessus nous avons :
case 2 ⇒ combinaison de variables a = 1 **et** b = 0 ⇒ valeur de la fonction = 0.

Représentation d'un tableau de Karnaugh

Un tableau de Karnaugh peut se représenter sous les formes suivantes :



Ces trois représentations sont équivalentes !

Un tableau de Karnaugh nous renseigne donc sur les données suivantes :

- Le nom de la fonction (par ex : X),
- Le nom des variables (a, b),
- L'état des variables : 0 , 1 ou une barre représentant l'état 1,
- La valeur de la fonction (1 ou 0).

Nous notons que :
Dans la case 1 les variables valent toutes 0.
Si l'on adopte la notation algébrique booléenne pour les variables, elle nous renseigne du nom **et** de l'état de la variable (A ; $\bar{A}$)

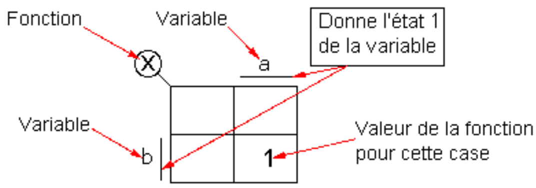


Tableau de karnaugh à 3 variables :

A chaque case est associé un triplé des valeurs a, b, c.
Exemple : La case 1 représentera le triplet {0,0,0} ou a = 0, b = 0 et c = 0.
Nous pouvons dire également que la case 1 correspond au **produit** ($\bar{\boldsymbol{A}}.\bar{\boldsymbol{B}}.\bar{\boldsymbol{C}}$)
Dans ce cas la représentation devient :

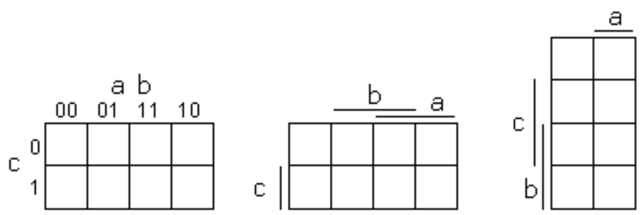


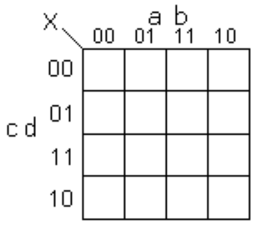
Tableau de Karnaugh à 4 variables :

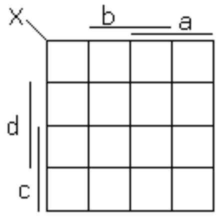
A chaque case est associé un quadruplet des valeurs a, b, c, d.

Exemples :
la case 4 représentera le quadruplet {1,0,0,0} ou a = 1, b = 0, c = 0 et d = 0
($\boldsymbol{A}.\bar{\boldsymbol{B}}.\bar{\boldsymbol{C}}.\bar{\boldsymbol{D}}$)

La case 11 représentera le quadruplet {1,1,1,1} ou a = 1, b = 1, c = 1 et d = 1
($\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B}.\boldsymbol{C}.\boldsymbol{D}$)

La case 16 représentera le quadruplet {1,0,1,0} ou a = 1, b = 0, c = 1 et d = 0
($\boldsymbol{A}.\bar{\boldsymbol{B}}.\boldsymbol{C}.\bar{\boldsymbol{D}}$)

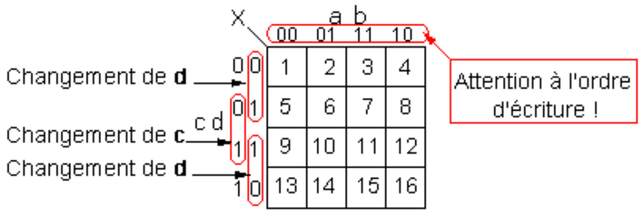




Remarquez bien que les valeurs binaires de a et b s'écrivent comme suit : 00 01 <u>11</u> 10 et pas dans l'ordre binaire comme : **00 01 10 11** aussi appelé le code Gray.
Le code binaire Gray, contrairement au code binaire naturel, permet de ne faire évoluer qu'un bit lorsque l'on passe d'un code à son suivant ou son précédent.
Les variables composant le tableau de Karnaugh seront codées selon le code Gray. L'avantage, c'est que la suite du dernier code est le premier (et inversement). Donc, le tableau ne sera pas écrit sur une surface plane, mais sur un cylindre, ce qui donnera des simplifications possibles.

Adjacences des cases

Dans chaque cas, l'ordre d'écriture des états des variables fait qu'**entre deux cases voisines** (en ligne ou en colonne) **une seule variable change d'état** ; on dit de telles cases qu'elles sont **adjacentes.**



La case 2 correspond à a = 0 ; b = 1 ; c = 0 ; d = 0
La case 3 correspond à a = 1 ; b = 1 ; c = 0 ; d = 0
Lorsque nous passons de 2 à 3, seule la variable "a" change d'état :
2 et 3 sont **adjacentes.**
Lorsque nous passons de 2 à 1, seule la variable "b" change d'état :
2 et 1 sont **adjacentes.**
Lorsque nous passons de 2 à 6, seule la variable "d" change d'état :
2 et 6 sont **adjacentes.**
Enfin, lorsque nous passons de 2 à 14, seule la variable "c" change d'état :
2 et 14 sont **adjacentes.**
Nous venons de déterminer les adjacences de la case n° 2.

Cette notion de cases adjacentes est fondamentale !

CONSTRUCTION DU TABLEAU

Nous voyons ici comment obtenir une équation de sortie simplifiée, à partir d'une table de vérité en utilisant la technique utilisé par Karnaugh.

A	B	C	S
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

La sortie Z de notre dispositif doit fonctionner dans les cas suivants :

- si les 3 variables a, b et c sont simultanément à l'état 0 (fonction **ET**) ➔ $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$
- **OU** si a = 0, b = 1, c = 1 simultanément (fonction **ET**) ➔ $\overline{A}.B.C$
- **OU** si a = 1, b = 0, c = 0 simultanément (fonction **ET**) ➔ $A.\overline{B}.\overline{C}$

Ce que nous traduisons par l'équation :

$$\mathbf{S} = \boldsymbol{\overline{A}.\overline{B}.\overline{C} + \overline{A}.B.C + A.\overline{B}.\overline{C}}$$

Dans le tableau de Karnaugh, nous mettrons un «1» dans chacune des cases correspondant aux termes $\overline{A}.\overline{B}.\overline{C}$, $\overline{A}.B.C$ et $A.\overline{B}.\overline{C}$
Nous placerons un «0» dans les cases correspondant aux autres termes.

Z	b	b	a	a
	1	0	0	1
c	0	1	0	0

Il est important de remarquer que la table de vérité, l'écriture algébrique d'une fonction et le tableau de Karnaugh ne sont que des formes d'écriture différentes du même phénomène.

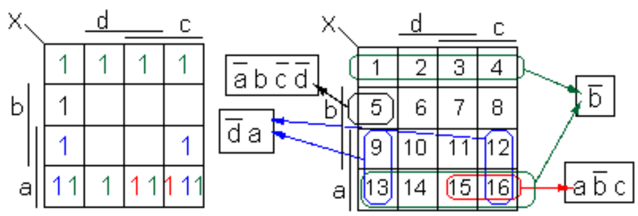
REPÉRAGE DE ZONES DANS UN TABLEAU DE KARNAUGH

Soit à transcrire l'équation logique suivante :

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{A.\overline{B}.C + A.\overline{D} + \overline{A}.B.\overline{C}.\overline{D} + \overline{B}}$$

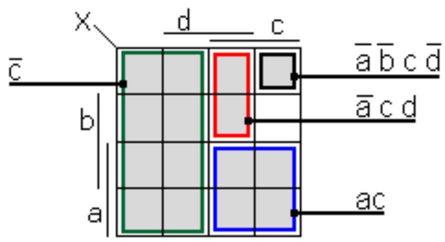
Nous devons écrire un «1» dans toutes les cases qui vérifient chaque terme de l'équation X.

Le 1er terme est vrai dans les cases n[os] 15 et 16 (en rouge),
le 2ème terme est vrai dans les cases n[os] 9 12, 13 et 16 (en bleu),
le 3ème terme est vrai dans la cases n[os] 5 (en noir),
le 4ème terme est vrai dans les cases n[os] 1, 2, 3, 4, 13, 14, 15 et 16 (en vert).



Dans la pratique nous remplissons une seule fois les cases.
Nous pouvons observer les faits suivants :

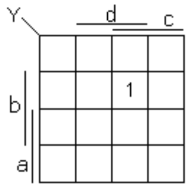
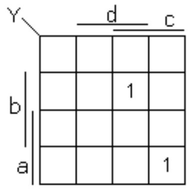
- quand un terme ne contient qu'une variable il occupe une zone de 8 cases,
- quand un terme est un produit de 2 variables il occupe une zone de 4 cases,
- quand un terme est un produit de 3 variables il occupe une zone de 2 cases,
- quand un terme est un produit de 4 variables il occupe une zone d'1 cases.



Lecture d'une fonction dans un tableau de Karnaugh

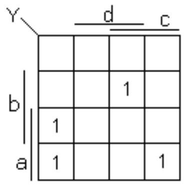
La lecture d'une fonction dans un tableau de karnaugh est le problème inverse du paragraphe précédent .

Exemples de lecture

	Dans l'exemple 1 nous lisons que Y est égale à $\overline{a}$ *ET* b *ET* c *ET* d et nous écrivons Y = $\overline{a}$ · b · c · d.		Dans l'exemple 2 nous lisons que : Y est égale à $\overline{a}$ ET b ET c ET d OU a ET $\overline{b}$ ET c ET $\overline{d}$ et nous écrivons Y = $\overline{a}$ · b · c · d + a · $\overline{b}$ · c · $\overline{d}$

Regroupement de cases dans un tableau de Karnaugh

Soit le tableau de la fonction Y suivante :



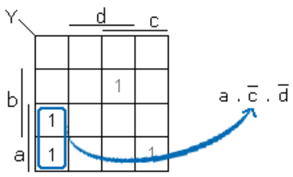
Nous pouvons écrire :

$$Y = \overline{a}.b.c.d + a.b.\overline{c}.\overline{d} + a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d} + a.\overline{b}.c.\overline{d}$$

En fait, nous pouvons simplifier cette expression en remarquant que :

$$a.b.\overline{c}.\overline{d} + a.\overline{b}.\overline{c}.\overline{d} = a.\overline{c}.\overline{d}.(b + \overline{b}) = a.\overline{c}.\overline{d}$$

Ces deux termes correspondent à 2 cases adjacentes (cases 9 et 13).
Nous aurions pu lire directement dans le tableau de Karnaugh :

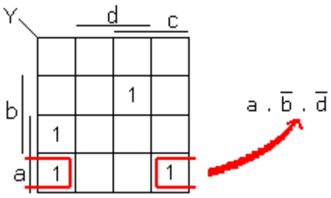


Notre expression est maintenant sous la forme :

$$Y = \overline{a}.b.c.d + a.\overline{b}.c.\overline{d} + a.\overline{c}.\overline{d}$$

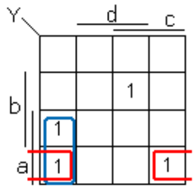
Minimisation d'une fonction dans un tableau de Karnaugh

En continuant notre observation nous pouvons remarquer également que la fonction vaut «1» dans deux autres cases adjacentes, ce qui nous aurait conduit à l'expression :



$$Y = \overline{a}.b.c.d + a.b.\overline{c}.\overline{d} + a.\overline{b}.\overline{d}$$

Mais l'expression la plus simple sera obtenue en regroupant les cases comme indiqué :



Ce qui correspond à la manipulation algébrique illustrée ci-après :

$$Y = a.b.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.c.\bar{d} + \bar{a}.b.c.d$$

$$= \underbrace{a.b.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d}} + \underbrace{a.\bar{b}.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.c.\bar{d}} + \bar{a}.b.c.d$$

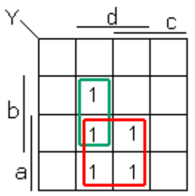
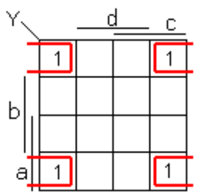
$$= a.\bar{c}.\bar{d} + a.\bar{b}.\bar{d} + \bar{a}.b.c.d$$

Ce qui donne l'expression la plus simple que l'on puisse obtenir :

$$Y = \bar{a}.b.c.d + a.\bar{b}.\bar{d} + a.\bar{c}.\bar{d}$$

Nous avons *minimise* l'équation de la fonction Y.
En regroupant les cases adjacentes par deux, on supprime une variable des termes correspondants ; une manipulation algébrique simple montre que pour supprimer deux variables, il faut disposer de 4 cases adjacentes, pour en supprimer 3 il faut 8 cases adjacentes…

Exemples :

	$Y = a.d + b.\bar{c}.d$		$Y = \bar{b}.\bar{d}$

RÉSUMÉ

La méthode de lecture des fonctions dans un tableau de Karnaugh consiste donc à regrouper les cases adjacentes par 2^n, n'étant le plus grand possible. On essaie de regrouper toutes les cases de cette manière, les chevauchements de groupes étant permis.

Une zone de 8 cases définira une variable,
Une zone de 4 cases définira un produit de 2 variables,
Une zone de 2 cases définira un produit de 3 variables,
Une zone d'1 cases définira un produit de 4 variables.

On lit enfin la fonction, en ne **conservant** pour chaque association que **les variables qui ne changent pas d'état.**

CAS PARTICULIER ET ÉLÉMENT INDÉTERMINÉ

Il arrive parfois qu'une fonction soit indéfinie pour certaines combinaisons des variables, pour différentes raisons ; la plus courante est que certaines combinaisons des variables étant impossibles, on ne juge pas utile de donner une valeur particulière à la fonction pour ces combinaisons-là.
Dans les cases correspondantes du tableau de Karnaugh, on placera un signe particulier (∅ : élément indéterminé).

Lors du regroupement des cases nous transformons le Ø en 0 ou en 1 suivant la convenance ou les simplifications qui peuvent en découler.
Exemple

Z		b	b, a	a
	0_1	Φ_2	0_3	0_4
c	1_5	Φ_6	1_7	1_8

On obtient ici l'expression la plus simple de F en transformant le Ø de la case 6 en «1» , ce qui permet de regrouper les cases 5, 6, 7, 8 et en transformant le Ø de la case 2 en «0». Nous aurons donc : **Z = c**

Exemple élaborée

Supposons qu'on a fait des observations auprès d'un système de tuyaux et des vannes qui remplissent une citerne. On vous demande d'enregistrer les combinaisons utilisées et lesquelles sont défendues. Après un bout de temps on arrive à ce qui suit :

Remarque que l'on remplace le ∅ par 0

a	b	c	d	S	Expression
0	0	0	0	0	----
0	0	0	1	1	$\overline{ABC}D$
0	0	1	0	0	----
0	0	1	1	0	----
0	1	0	0	0	----
0	1	0	1	1	$\overline{A}B\overline{C}D$
0	1	1	0	0	----
0	1	1	1	Ø	----
1	0	0	0	1	$A\overline{BCD}$
1	0	0	1	1	$A\overline{BC}D$
1	0	1	0	1	$A\overline{B}C\overline{D}$
1	0	1	1	1	$A\overline{B}CD$
1	1	0	0	1	$AB\overline{CD}$
1	1	0	1	1	$AB\overline{C}D$
1	1	1	0	1	$ABC\overline{D}$
1	1	1	1	Ø	----

Finalement en regroupant on arrive à l'équation suivante :

$$\boldsymbol{\overline{ABC}D + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{BCD} + A\overline{BC}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + AB\overline{CD} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D}}$$

J'invite le lecteur à la simplification par l'algèbre de Boole ;-)

Par contre par les tableaux de Karnaugh cette simplification est assez simple !
Si l'on a 4 variables a, b, c et d :

- a et b seront placés en colonne,
- c et d seront placés en ligne,

ce qui donne le tableau suivant :

À partir de 6 variables, le tableau devient de plus en plus imposant. Il est tout à fait logique, lorsqu'on a bien compris la méthode de recherche, de passer en 3D, c'est-à-dire de remplir un tableau suivant les 3 axes.

F		a b			
		0 0	0 1	1 1	1 0
c d	0 0				
	0 1				
	1 1				
	1 0				

De ce fait, on se retrouve avec 16 cases vides, correspondant aux 16 combinaisons possible de 4 variables pouvant prendre 2 états.
Chaque combinaison offre 3 solutions possibles de l'état de sortie de la variable F :

- 1 si la sortie est vraie
- 0 si la sortie est fausse
- X si la sortie est indéterminée, c'est-à-dire que, par exemple, le système ne peut pas fournir cette combinaison.

Voilà ce que peut donner un tableau rempli :

F		a b			
		00	01	11	10
c d	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

À partir du moment où le tableau est correctement rempli, on peut commencer à résoudre le système.

RÉSOLUTION DU TABLEAU

Les rassemblements

Le but est très simple. Il faut effectuer des regroupements de 1 ou de X ; par paquets de 1, 2, 4 ,8, 16....2^n. Ces regroupements doivent être des rectangles ou des carrés, jamais de travers, et les plus grands possible sachant qu'un élément déjà utilisé peut être repris.

Attention : ne pas oublier que le tableau de Karnaugh est *écrit* sur un cylindre, voir Thoroides

F		a b			
		00	01	11	10
c d	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

Avec ce tableau on peut faire 3 rassemblements

F		a b			
		00	01	11	10
c d	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		a b			
		00	01	11	10
c d	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		a b			
		00	01	11	10
c d	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

F		a b			
		00	01	11	10
c d	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

Le suivant est inutile puisqu'il peut être fait par les 2 de gauche au-dessus

La résolution des rassemblements

Maintenant que l'on a pu, avec différentes sélections, prendre tous les 1, on essaie de résoudre les rassemblements. Pour cela, il faut que les variables participant au rassemblement concerné ne changent pas.

- Exemple avec le rassemblement bleu :Dans les 4 cas possibles , la variable **a** est toujours à 1 et **d** est toujours à 0
- Exemple avec le rassemblement vert :Dans les 4 cas possibles, la variable **c** est toujours à 0 et **d** est toujours à 1 :
- Exemple avec le rassemblement rose :Dans les 4 cas possibles, la variable **a** est toujours à 1 et **b** est toujours à 0

  Conclusion : Bleu➔$A\overline{D}$;Vert➔$D\overline{C}$; Rose➔$A\overline{B}$

F		a b			
		00	01	11	10
c d	00	0	0	1	1
	01	1	1	1	1
	11	0	0	0	1
	10	0	0	1	1

Pour ab on a 11 et 10 qui représentent ab. Comme on le voit le a (11 ; 10) reste toujours 1 et le b (11 ; 10) change.

Pour cd on a 00 et 10 comme valeur. Ici on voit que le c (00 ; 10) change et le d (00 ; 10) pas !

Conclusion : On obtient a=1 et d=0

$$F = A\overline{D} + D\overline{C} + A\overline{B}$$

⇧

$$\overline{ABC}D + \overline{A}B\overline{C}D + A\overline{BCD} + A\overline{BC}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + AB\overline{CD} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D}$$

Inutile de dire que cette simplification est beaucoup plus facile à réaliser et moins onéreuse à réaliser

.

AUTRE EXEMPLE

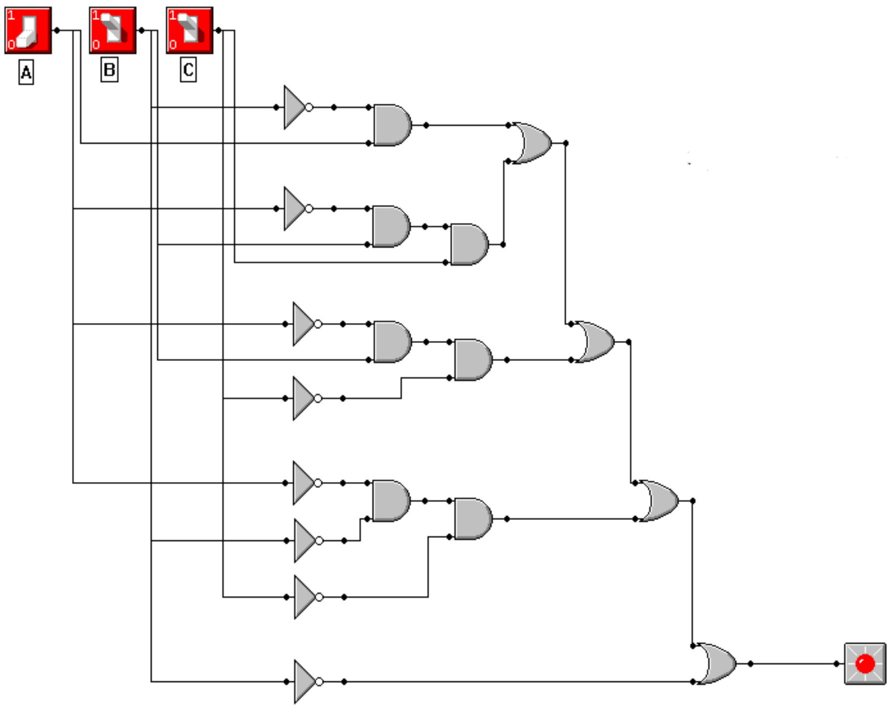
Dans ce qui suit je vais vous donner encore une autre exemple qui montre bien que la simplifications des équations peut être très utile et que ce n'est pas de « l'Art pour de l'Art et sans But » Cela mérite vraiment d'investir un peu de temps la dedans afin d'omettre tous les composant superflu

Supposons que l'on vous demande de réaliser un schéma électrique/logique selon certains contraintes et obligations. Vous décidez d'utiliser des équations logique et après investigation la prémisse brute qui en résulte est:

$$A\overline{B} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{ABC} + \overline{B}$$

Sans réfléchir de plus on prend des pièces et on commence à souder selon les données ci-dessus et on arrive à un schéma impressionnant..

Ceci est un schéma assez complexe. Il nous faut 19 portes pour réaliser et incorporer toute la logique.



Le résultat de la prémisse ci-dessous

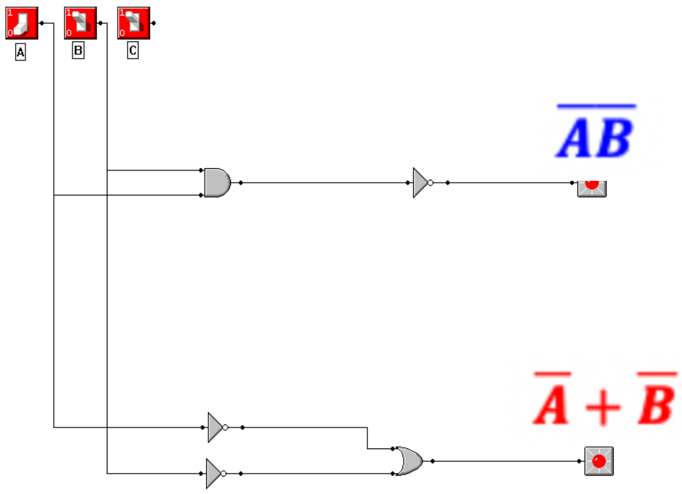
Ci dessus vous voyez donc la réalisation d'une équation brute, non simplifié ce qui engendre une certaine complexité. Afin de la rendre plus lisible, moins onéreuse et plus efficace on va la simplifier. Dans une première étappe j'applique l'algèbre de Boole et ensuite j'effectue la même tâche en appliquant un tableau de Karnaugh.

$$\boldsymbol{A\overline{B} + \overline{A}BC + \overline{A}B\overline{C} + \overline{ABC} + \overline{B}}$$

$A\overline{B} + \overline{B} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{ABC} + \overline{A}BC$	(regroupement des termes)
$(A + 1)\overline{B} + \overline{AC}.(B + \overline{B}) + \overline{A}BC$	(mise en évidence)
$\overline{B} + \overline{AC} + \overline{A}BC$	(application des propriétés)
$\overline{B} + \overline{A}.(\overline{C} + CB)$	(mise en évidence)
$\overline{B} + \overline{A}.(\overline{C} + C).(\overline{C} + B)$	(distributivité de + vers .)
$\overline{B} + \overline{AC} + \overline{A}B$	(application des propriétés)
$\overline{B} + B\overline{A} + \overline{AC}$	(regroupement des termes)
$(\overline{B} + B).(\overline{B} + \overline{A}) + \overline{AC}$	(distributivité de + vers .)
$\overline{B} + \overline{A} + \overline{AC}$	(application des propriétés)
$\overline{A}.(1 + \overline{C}) + \overline{B}$	(mise en évidence)
$\boldsymbol{\overline{A} + \overline{B}}$ ou $\boldsymbol{\overline{AB}}$	(application des propriétés)
	(application de De Morgan)

Et on commence de nouveau à souder…. ;-)

Après simplification il n'y a plus beaucoup à réaliser. Deux (INV/AND) ou trois (INV/INV/OR) composants sont suffisants.



Les deux possibles simplifications dans un schéma

Il est évident que le schéma au-dessus est fort préférable à la précédente mais la façon d'y arriver n'est pas la plus facile. On se trompe facilement dans l'algèbre de Boole. Je vous montre maintenant comment d'y arriver plus facilement par un tableau de Karnaugh.

S	a=b=0	a=0 et b=1	a=b=1	a=1 et b=0
c=0	1	1	0	1
c=1	1	1	0	1

Le groupement est marqué en jaune et en grillé (les 2 parties se chevauchent) et pour la partie grillé on peut conclure que ce n'est que a=0 qui ne change pas et pour la partie jaune ce n'est que b=0 qui ne change pas. Donc résultat ➔ $\overline{A}+\overline{B}$ ou $\overline{AB}$ (De Demorgan)

Remarque bien qu'une prémisse est en général un résultat obtenu soit d'un table de vérité soit des équations logique soit par déduction logique d'une situation réelle ou imaginaire.

Un exemple : Imaginons nous une formation à TechniFutur pour apprendre à usiner des pièces de métal. Afin d'être admis à cette formation il faut s'accorder à quelques conditions imposées par la direction par mesure de sécurité. Ci-dessous un petit extrait :

> « *Afin de traiter tout le monde sur pied égale Technifutur ne se fierai jamais sur votre haleine. Donc s'il vous arrive un accident il faut rassurer de ne pas avoir bu afin de rester OK ! Ne pas avoir d'accidents cela évidemment c'est toujours OK, peut-être l'option la plus préférable de toutes ! Mais quand on a bu et il ne vous arrive pas d'accident c'est OK aussi vont remarquer des petits filous !* »

En résumé on peut conclure qu'il y a trois conditions posé dans cet extrait. (On a bu ou on a pas bu) (On a bien ou on n'a pas d'accident) et (votre haleine sent ou ne sent pas de l'alcool.) Ces 3 conditions ont 8 possible combinaisons que l'on peut traduire par une table de vérité. L'ivresse sera symbolisé par A, l'accident par B et l'odeur de votre haleine par C

Remarquez que la simplification est pareille à celle de l'au-dessus.

A	B	C	R (OK)
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Remarque bien que uniquement les résultats OK marqué avec 1 seront tenu en compte !
Par conséquence on obtient :

$$\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}+\overline{A}\,\overline{B}C+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}\,\overline{C}+A\overline{B}C$$

Après simplification on obtient aussi $\overline{A}+\overline{B}$ ou $\overline{AB}$

Simplification Booléenne de

$$\boxed{\boldsymbol{\overline{ABC}D + \bar{A}B\bar{C}D + A\overline{BCD} + A\overline{BC}D + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD + AB\overline{CD} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D}}}$$

$\boldsymbol{\overline{ABC}D + \bar{A}B\bar{C}D + A\overline{BCD} + A\overline{BC}D + A\bar{B}C\bar{D} + A\bar{B}CD + AB\overline{CD} + AB\bar{C}D + ABC\bar{D}}$

$\boldsymbol{\overline{BC}D.(\bar{A} + A) + B\bar{C}D.(\bar{A} + A)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A\bar{B}.(CD + \overline{CD})}$ $\qquad$ $\boldsymbol{AB\bar{D}.(\bar{C} + C)}$

$\boldsymbol{\overline{BC}D + B\bar{C}D}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A\bar{B} + A\bar{B}C\bar{D}}$

$\boldsymbol{\bar{C}D.(\bar{B} + B)}$ $\qquad$ $\boldsymbol{A\bar{B}\,.(1 + C\bar{D})}$ $\qquad$ $\boldsymbol{AB\bar{D}}$

$\boldsymbol{\bar{C}D}$ *** $\qquad$ $\boldsymbol{A(\bar{B} + B\bar{D})}$

$$\boxed{\boldsymbol{A\bar{B} + A\bar{D} + \bar{C}D}}$$

(Sources Wikipédia et www.positron-libre.com)